經濟論叢

第九十九巻　第三號

昭和四十二年三月

京都大學經濟學會

分解原理と分権管理

浅沼 萬里

まえがき

Dantzig and Wolfe は，ある型の巨大な線型計画問題〔以下 LP と略記〕を解く技法として，分解原理 (the decomposition principle) を開発したが，それは，分権管理 (decentralization) という問題にとっても，興味深い意義を含むものである。

分権管理における根本問題は，一方で各部分単位にできるだけ自主性をみとめることによって情報の節約とインセンティヴとを確保し，他方でシステム全体としての最適を達成するという，二面的な要請にかなうような，調整機構の創出である。

自然発生的な分権的制度である市場経済において，技術と選好が一定の仮定をみたすとき，価格が上の二重の要請にかなうものであるということが経済学の古くからの命題であったし，他方，経験的な事実として，企業内の部分単位に利潤センター (profit center) という地位を与えるとき，必然的に内部振替価格 (transfer price) の決定問題が生じる[1] から，意識的な分権管理の用具として価格を考える動きが当然おこる。

だが，分権管理に価格を利用するについては，次のような問題に直面しなければならない。いま，システム全体にとっての最適を分権化の下で達成せしめるような価格を有効価格とよぶならば，

(1) 有効価格の存在が理論的に想定される場合でも，その数値を能率よく算出することはかならずしも容易でない。

(2) 有効価格の存在自体が保証されない状況がある。部分単位間に技術的な

1) Hirshleifer, 〔5〕, p. 27.

相互依存関係――いわゆる外部効果 (externality) の存在する場合が，その一つである。

(1)は計算価格固有の問題，(2)は価格一般について厚生経済学が明らかにしてきた局面である。

分解原理は，価格を手引とする分権化の下で，中央スタッフと諸部分単位との間の通信により，逐次改良的に，最適計画に到達する手続として解釈できる。情報の不完全集中にもかかわらず，有限回の手順で，全体的最適への到達が保証される。その代償は分権化の不徹底であり，中央が価格を計算・通告するだけでは足りず，最後的には，各部分単位が作成・報告した諸案の，結合比率を，中央が指令することで，決定手続が完了する。こうして，(2)の問題が捨象されている線型の世界においても，ある観点から(1)の問題を追求すれば，「見えざる手」にゆだねることができず，統制と自治の混合システムが必要になることが，一見きわめて技術的な1つの領域において再確認される。

本稿を2部に分ち，第I節で，分解原理の数学理論を整理しておく。第II節で，分権的決定の一機構としてこれを解釈し，その諸含意を考察する。

I 分解原理の数学理論[2)]

〔1〕 解くべき問題

現実にはしばしば次のような構造をもった大型の LP 問題が登場する。

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \cdots\cdots A_r \\ B_1 & O \cdots\cdots O \\ O & B_2 \cdots\cdots O \\ \vdots & \quad\quad\quad \vdots \\ O & O \cdots\cdots B_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix},$$

$$X_j \geq O,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ r, \qquad (\text{I} \cdot 1)$$

$$\max z = \sum_{j=1}^{r} C_j X_j$$

2) 分解原理の数学理論を提出したのは Dantzig and Wolfe,〔2〕である。Dantzig,〔3〕は，その諸含意を種々の方向に展開している。かれらの定式化は，行列理論によるとはいえ，おおむ

ここに，A_j は $(m_0 \times n_j)$ 行列，B_j は $(m_j \times n_j)$ 行列，b_0 は m_0 次列ベクトル，b_j は m_j 次列ベクトル，C_j は n_j 次行ベクトル，X_j は n_j 次列ベクトル。

もしすべての A_j が O であれば，(I・1)は r 個のヨリ小型の LP「$B_jX_j=b_j$, $X_j \geq O$, $\max z_j=C_jX_j$」に帰着するが，一般には，制約 $\sum_j A_jX_j=b_0$ の存在のため，r 個の部分を独立に最適化することはできない。他方，(I・1) を1個のLPとして解くためには $\sum_{j=0}^{r} m_j$ 次の基底を用いなければならない[3] が，問題のサイズによっては，これは計算機の能力を超えるものであろう。このような場合のために，(I・1) を，

(a) ほぼ独立的な部分に対応する r 個のサブプログラム，および

(b) それらを連結する1個のマスター・プログラム

に分解して解く技法を，Dantzig and Wolfe が開発した。分解の代償として，(a)(b)は一般に何回も解かなければならない。手順の大筋は次のようになる。

1. マスター・プログラムを解く。その解から各サブプログラムの目的函数ができる。
2. 諸サブプログラムを解く。その解からマスター・プログラムに付加すべき新しい列ができる。
3. ある最適性テストをパスするまで上記のプロセスを反復する。有限回で解に到達することができる。

以下，この解法を見ることにしよう。

〔2〕 フル・マスター・プログラムの誘導

$B_jX_j=b_j$, $X_j \geq O$ (I・1′)の可能解の集合は，有限個の端点しかもたない閉凸集合である。もし強い意味で有界なら，この集合は多面体であり，集合内の任意の点を，端点の凸結合によって表現することができる。簡単化のため，有界

ね2個のサブプログラムを用いるものであるが，ヨリ一般化された形での説明を，Hadley,〔4〕, pp. 400–11； および Simonnard,〔9〕, pp. 211–22, に見ることができる。目的函数を explicit に示し， かつ最大化問題として定式化するのが便利と考えたので， この節の説明は主として Hadley によっている。

3) 以下とくにことわらないかぎり非退化を仮定しておく。

性を仮定して出発する[4]。

(I・1′) の可能解集合の端点を X_j^k で表わし，このような端点が K_j 個あるものとする。そのとき，(I・1′) の任意の可能解 X_j は，　(I・2)

$$X_j=\sum_{k=1}^{Kj}\lambda_j^k X_j^k,\ \lambda_j^k\geq 0,\ k=1,\ \cdots, K_j;$$

$$\sum_{k=1}^{Kj}\lambda_j^k=1$$

と書ける。逆に (I・2) の形の X_j は (I・1′) の可能解である。

したがって，いま次の諸制約：

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{Kj}\lambda_j^k A_j X_j^k=b_0,\ \sum_{k=1}^{Kj}\lambda_j^k=1,\ j=1,\cdots,\nu \tag{I・3}$$

を考えると，(I・1) の任意の可能解に対し，(I・3) をみたす1組の $\lambda_j^k\geq 0$ が定まり，(I・3) をみたす任意の $\lambda_j^k\geq 0$ は，(I・1) をみたす1組の X_j を定める[5]。

ゆえに，いま次の1次変換：

$$S_j^k=A_jX_j^k\ ;\ f_j^k=C_jX_j^k \tag{I・4}$$

を考えると，λ_j^k を変数とすると次の LP は，もとの LP (I・1) とエキバレントである。

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{Kj}\lambda_j^k S_j^k=b_0,\\ &\qquad\sum_{k=1}^{Kj}\lambda_j^k\quad=1,\qquad j=1,\ \cdots,\ \nu,\\ &\qquad\quad\lambda_j^k\geq 0,\qquad\quad \text{all}\quad j,k,\\ &\qquad \max z=\sum_j\sum_k f_j^k\lambda_j^k\end{aligned} \tag{I・5}$$

(I・5) の最適解 $\mathring{\lambda}_j^k,\ k=1,\cdots,K_j;j=1,\ \cdots,\nu$ をみいだせば，(I・1) の最適解を，

$$\mathring{X}_j=\sum_k\mathring{\lambda}_j^k X_j^k,\ j=1,\ \cdots,\ \nu \tag{I・6}$$

4) 若干のサブプログラムに非有界性のある場合も，計算手続に若干の一般化を加えれば，とくに困難なく理論に包摂できる。Dantzig,〔3〕, pp. 453–54; Simonnard,〔9〕, pp. 217–19.

5) (I・3) をみたす1組の $\lambda_j^k\geq 0$ は (I・1) をみたす1組の X_j をユニークに定めるが (I・1) をみたす1組の X_j は，1組の λ_j^k をユニークに定めるとはかぎらない。しかしすくなくとも1組の λ_j^k は存在する。Hadley,〔4〕, p. 401 脚注。

によって，得ることができる。(I・5) をフル・マスター・プログラムとよぶ。

もとの LP (I・1) は，$\sum_{j=0}^{r} m_j$ 個の制約式をもっていたが，(I・5) の制約式は m_0+r 個であるから，一般に，(I・1) の場合よりずっと小さい基底行列を使って解けるという利点がある。半面，変数の個数は，$\sum_j n_j$ 個から $\sum_j K_j$ 個に変り，一般にかなり増えているはずである。もし (I・5) を全面的に定式化してから解を求めはじめねばならないとすれば，$B_jX_j=b_j$, $X_j \geq O$, $j=1, \cdots, r$ の基本可能解（＝端点），計 $\sum_j K_j$ 個をすべて求めておいてから出発しなければならないわけだから，さして得策とはならない。

さいわい，(I・5) の任意の基底，m_0+r 次の正方行列から出発し，新たに基底に導入すべき列だけを，必要のつど作り出してゆくという方法がある。(I・5) に対する最適性テストについて考えることが，話のいとぐちとなる。

〔3〕 最適性テスト

e_j を r 次の第 j 単位（列）ベクトル，$\mathbf{1}$ を r 次の行和ベクトルとして，$\bar{S}_j^k=[S_j^k, e_j]$，$\bar{b}=[b_0, 1]$ と書き[6]，(I・5) の制約式を次の形に書いておく。

$$\sum_j \sum_k \lambda_j^k \bar{S}_j^k = \bar{b} \qquad (\text{I}\cdot 7)$$

さて，(I・5) の任意の (m_0+r 次) 基底行列が与えられたとし，これを B，これに対応する f_j^k をならべてできる行ベクトルを f_B としよう。このとき，(I・5) に対する $\mathbf{1}$ つの基本可能解 $\lambda_B=B^{-1}\bar{b}$ が定まり，対応的に，双対変数ベクトル $\boldsymbol{\Pi}_B=(\boldsymbol{\Pi}_{\text{I}}, \boldsymbol{\Pi}_{\text{II}})=f_BB^{-1}$ が定まる。ここに $\boldsymbol{\Pi}_{\text{I}}$ は $\boldsymbol{\Pi}_B$ の最初の m_0 個の成分，$\boldsymbol{\Pi}_{\text{II}}$ は残りの r 個の成分からなるものとする。

$\bar{S}_j^k$ に対するシンプレックス基準は次のようになる。

$$\begin{aligned} z_j^k-f_j^k &= \boldsymbol{\Pi}_B\bar{S}_j^k-f_j^k=\boldsymbol{\Pi}_{\text{I}}S_j^k+\pi_{\text{II}j}-f_j^k \\ &= (\boldsymbol{\Pi}_{\text{I}}A_j-C_j)X_j^k+\pi_{\text{II}j} \quad [(\text{I}\cdot 4) \text{ を代入}] \\ &= \pi_{\text{II}j}-(C_j-\boldsymbol{\Pi}_{\text{I}}A_j)X_j^k \qquad (\text{I}\cdot 8) \end{aligned}$$

ただし，$\pi_{\text{II}j}$ は $\boldsymbol{\Pi}_{\text{II}}$ の第 j 成分。

与えられた基本可能解 λ_B が最適かどうかを判定するためには，$\min_{j,k}(z_j^k-f_j^k)$

6) 紙面の都合上横に並んだ形で書くが，$\bar{S}$ と $\bar{b}$ は m_0+r次 の列ベクトルである。

がわかればよい。この値が非負ならば λ_B は最適であるし，負ならば iteration を続けなければならない。

$$\min_{j,k}(z_j{}^k-f_j{}^k)=\min\left[\min_k(z_1{}^k-f_1{}^k),\ \cdots,\ \min_k(z_r{}^k-f_r{}^k)\right] \qquad (\mathrm{I}\cdot 9)$$

であることに注意しておく。

ここで (I・8) を見ると，次のことがわかる。すなわち，

$$B_jX_j=b_j,\ \ X_j\geq 0,\ \ \max Z_j=(C_j-\Pi_{1j}A_j)X_j \qquad (\mathrm{I}\cdot 10)$$

という LP の最適基本解 $X_j{}^*$ (およびそれに対応する Z_j の値 $Z_j{}^*$) を求めると，この $X_j{}^*$ が $\min_k(z_j{}^k-f_j{}^k)$ を与え，かつ，

$$\min_k(z_j{}^k-f_j{}^k)=\pi_{\mathrm{II}j}-Z_j{}^*$$

である。したがって，$j=1,\ \cdots,\ r$ につき，(I・10) の形の LP を，計 r 個解き，

$$\min_j(\pi_{\mathrm{II}j}-Z_j{}^*)=\pi_{\mathrm{II}s}-Z_s{}^* \qquad (\mathrm{I}\cdot 11)$$

を決定すれば，これが，求める λ_B の最適性判定基準 $\min_{j,k}(z_j{}^k-f_j{}^k)$ を与える。

$Z_s{}^*$ を与える端点を，あらためて $X_s{}^r$ と書けば，フル・マスター・プログラム(I・5)の，これに対応する諸要素は，

$$S_s{}^r=A_sX_s{}^r,\ \ \overline{S}_s{}^r=[S_s{}^r,\ e_s],\ \ f_s{}^r=c_sX_s{}^r \qquad (\mathrm{I}\cdot 12)$$

によって，簡単に求めることができる。われわれは，$\pi_{\mathrm{II}s}-Z_s{}^*<0$ のときにかぎり，これらの諸要素を計算し，次の iteration に進めばよいのである。

〔4〕 計算手続

これまでにのべたことから，LP (I・1) に対して，次のような解法を組み立てることができる。

① 〔スタート〕

マスター・プログラム(I・5)の，最初の基底を構成する。このために，r 組の連立方程式 (I・1′) (サブプログラム (I・10) から目的函数を除いたもの) の各各につき任意の基本可能解 $X_j{}^0$ ($j=1,\ \cdots,\ r$) を求め，変換 (I・4) にもとづいて，(I・5) の列を作る。必要に応じ，スラック変数と技巧変数を導入すれば，解法の出発点となるべき，(I・5) の基底 B_0 を決めることができる。B_0 に対

応して，(I・5) の基本解 $\lambda_B = B_0^{-1}b$ および双対解 $\Pi_B = f_B B_0^{-1} = (\Pi_{\mathrm{I}}, \Pi_{\mathrm{II}})$ が定まるが，以下，最終ステップに至るまでは，オモテの解 λ_B は使わず，もっぱら双対解を利用する。なお，いまの段階では，λ_B は技巧変数を含んでいて，可能解でないかもしれない。その場合には，技巧変数が追い出されるまで，以下の解法は，いわゆる two-phase method[7] の，phase I をたどることになる。

② 〔サブプログラムの構成と計算〕

$C_j - \Pi_{\mathrm{I}} A_j$ を，第 j サブプログラムの評価ベクトルとして与え，r 個のサブプログラム (I・10) を解く[8]。ただし，phase I をたどっている間は，C_j の，本来の変数に対応する成分を 0，技巧変数に対応する成分を -1 で，おきかえる。

(I・10) の基本最適解を，〔X_j^*，Z_j^*〕としよう。

③ 〔最適性テスト〕

$\min(\pi_{\mathrm{II}j} - Z_j^*) = \pi_{\mathrm{II}s} - Z_s^*$ の符号をしらべる。

1. $\Pi_{\mathrm{II}s} - Z_s^* \geq 0$ のとき，

(i) phase I の場合。マスター・プログラムにおける技巧変数の値がすべて 0 となっていれば，phase I が終了したことになるので，②にもどる。技巧変数に正のものがあれば，問題そのものに可能解が存在しないことになる。

(ii) phase II の場合。マスター・プログラム (I・5) は最適解に到達している。⑤へ進む。

2. $\Pi_{\mathrm{II}s} - Z^* < 0$ のとき，④へ進む。

④ 〔マスター・プログラムの基底の変換〕

$S_s^* = A_s X_s^*$，$f_s^* = c_s X_s^*$ を計算し，新たに基底に入れるべき列を作る。次にこの列をとり入れて，基底 B を変換する[9]。これに対応して新たな解 λ_B および Π_B を得る。②にもどる。

---

7) two-phase method については，たとえば Hadley，〔4〕を見よ。
8) 輸送問題法などが使える場合にはここのステップは非常に速くなる。
9) 改訂シンプレックス法を使えばこの操作は非常にかんたんになる。

⑤ 〔もとの問題の最適解の算出〕

マスター・プログラム (I・5) の最適基本可能解 $\mathring{\lambda}_B$ が得られた。このベクトルの成分 $\mathring{\lambda}_j{}^k$ をウエイトとして，(I・6) により，$\mathring{X}_j=\sum_k \mathring{\lambda}_j{}^k X_j{}^k$, $(j=1, \cdots, r)$ を計算すれば，この $\mathring{X}_j$ $(j=1, \cdots, r)$ が，もとの LP (I・1) に対する最適解である。

ちなみに，④で解いている LP は，フル・マスター・プログラム (I・5) のうち，基底にすでに入っている列と，新しく入れられる $S_s{}^*$ の列，計 m_0+r+1 個の列だけが，explicit に現われているものである。これを限定マスター・プログラムとよぶ[10]。

限定マスター・プログラムにおいて，非退化を保証してやれば，新しい列を導入するごとに z の値が増加することが保証されるから，フル・マスター・プログラムの有限個の基底がくりかえし現われることはありえず，したがって，上記の計算手続は，有限回で終了する。

以上の計算手続を，LP の，分解計算法 (the decomposition algorithm) とよび，その基礎をなす数学理論と合せて，分解原理と総称する。

II　分解原理の経済学的解釈[11]

まず，一般的な記号のままで，前節で定式化した計算手続に，経済計画作成手続としての意味づけを与える。情報を完全に集中化しないでも最適計画の作成が可能となることが観察されるが，この過程を媒介するのは一種の計算価格体系である。ある意味では罰金ないし補助金に相当する量も登場する。だが完全な分権化は成功しないようである。

次に例題を設ける。この例題を幾何的に観察するとき，分権化の徹底を阻ん

10) subprogram, full master program および restricted master program は，Dantzig,〔3〕の用語である。

11) LP の分解計算手続を 1 つの分権的決定過程のモデルとして解釈できることは，すでに Dantzig and Wolfe 自身，気づいていた。〔2〕, pp. 101–02. Dantzig,〔3〕は，§ 23-2 で，輸送問題への応用を対話劇風に例解し，§ 23-3 で，公定価格を利用する計画経済における年次計画作成への応用例を示した。Baumol and Fabian,〔1〕は，外部効果の問題との関連に言及している。

だ要因をヨリ明瞭に見てとることができる。

A．分権的決定モデル

第I節の LP 問題に，ある経済システムの最適計画作成問題という意味づけを与え，分解計算法によって解を求める過程を，システム内部における逐次的決定過程として解釈してみよう。

〔1〕 状況の規定

ある経済システム〔以下「企業」とよぶ〕が，各1種の製品を生産する多数（$\sum_{j=1}^{r} n_j$ 個）の工程をもっている。各（第 l）工程の投入・産出は操業水準 x_l に比例的であって，技術は，当面の計画の関係する期間，不変である。諸工程を，技術および資源制約の点で互いにほぼ独立的ないくつか（r 個）のグループに分けることができ，各グループを1個の部分単位〔以下「事業部」とよぶ〕に割り当てる。各事業部の管理する工程群のうち少なくとも1個は，他の諸事業部と共通の希少資源を必要とし，この点において事業部同志は間接的に影響しあう。システムの中央管理部〔以下「管理部」とよぶ〕が，m_0 種の共通資源を管理し，かつシステム全体の最適が達成されるよう調整をおこなう任に当る。当面の問題においては，第 l 製品1単位当りの利潤 c_l が与件であり，総利潤 $\sum_l c_l x_l$ の最大化が，システムの目的であるとする。

いま，各事業部固有の技術構造 B_j および資源制約 $B_j X_j = b_j$ にかんする知識を，管理部に集中することに別段の困難がなければ，管理部で一挙に（I・1）のような LP を解いて最適生産計画を決定し，事業部には生産の実施だけを要求することができる[12]。（この場合には普通の階層的組織が存在し，分権化は行われていないことになる。）だが，事業部にとっては必要に応じ手間をかければ B_j を析出できるが，管理部は完全な情報を欠くというような事態は十分にありうる[13]。このような場合で，かつ各工程の投入産出構造の，システム全体に関係する部分（A_j と C_j）は管理部に既知である場合，分解原理の，次の

12) この場合には，単なる数値計算法としてやはり分解原理が使われることになる。
13) Dantzig,〔3〕, p. 463 参照。

ような適用を考えることができる。

〔2〕 決定手続

① 最近の記録によるなり通報を求めるなりして，管理部は，各事業部の可能な生産計画（基本可能解 X_j^k）を1個ないし若干個づつ知ることができよう。これをもとにし，既知の A_j と C_j とを使って，(I・4) の S_j^k と f_j^k を計算する。必要に応じスラック変数（ないし技巧変数）をつかうことにし，少なくとも $m_0+\nu$ 個の列を用意すれば，〔限定〕マスター・プログラムを開設することができる。

マスター・プログラムを解いて得られる双対解 $\boldsymbol{\Pi}_B=(\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}})$ のうち，$\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}$ は，m_0 種の共通資源の価格として解釈できる。

② 管理部は，m_0 個の資源価格 $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}$ および全製品の1単位当り利益 c_l を，全事業部に公告する。第 j 事業部が X_j^k の生産を行えば，$C_jX_j^k$ の利益がかれに帰属するものとみなされるであろう。ただし企業の共通資源の消費高に対して価格が課され，かれは $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}A_jX_j^k$ の額を，管理部に支払わなければならない。こうして「事業部利潤」$Z_j=(C_j-\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}A_j)X_j$ の最大化が事業部の行動目的であることになる。管理部は，この企業内公定価格体系の下での最適生産計画の提出を，事業部に求める。

③ 事業部は，その事業部固有の諸制約と，公定価格体系のみを考慮し，他の事業部の事情には全く無頓着に，かれにとっての最適生産計画（X_j^* と Z_j^*）を作成・提出する。

④ 管理部は，事業部の提案に含まれている利潤数値 Z_j^* を，手許の数値 $\pi_{\mathrm{II}j}$ と比較し，Z_j^* の方が大きければ，新提案は企業の総利潤を増すものと判断し，これを採用することにする。

⑤ しかし，こうして集められた諸案を単純に加え合せたのでは，それらが共通資源の利用可能量の枠内におさまり実行可能となる保証はまったくない。管理部は，新規に採用される案と従来の諸案とを加重平均することによって調整をはかる。新規に採用する X_j^r から S_j^r と f_j^r を計算してマスター・プログラム

につけ加えこれを解きなおせば，オモテの解として最適ウエイトのベクトル $\boldsymbol{\lambda}_B$ が，双対解として新しい価格ベクトル $\boldsymbol{\Pi}_B=(\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}})$ が得られるであろう。

⑥ 新しく得られた $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}$ を公定価格の修正値として公告し，前と同じ手順をくりかえせば，1サイクルの後，企業の生産計画（$\boldsymbol{\lambda}_B$）は確実に改善されているはずである。そして，原理的には，有限回のサイクルで，企業は最適の生産計画 $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_B$ に適する[14]。

⑦ $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_B$ を得たとき，管理部は，価格による誘導を放棄する。企業の最適生産計画を各事業部に実施させるためには，事業部が従来おこなってきた諸提案の最適結合比率 $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_B$ を直接指示しなければならない。この事実によって，ここにのべてきた決定手続は，分権的制度としての意義をいちじるしく弱めるのであるが，この点については，のちに再び見るところがあろう。

〔3〕 双対価格

分解原理における1つの重要なポイントは第I節Cの（I・8）式で見た，シンプレックス基準の分解であった。すなわち，

$$z_j^k - f_j^k = \pi_{\mathrm{II}j} - (C_j - \Pi_{\mathrm{I}} A_j) X_j^k \qquad (\mathrm{I}\cdot 8)$$

この右辺第2項を最大化する X_j^k をさがすことをサブプログラムにゆだねることによって，われわれは，非常な多数にのぼるかもしれないサブプログラムの端点の中から，マスター・プログラムにとり入れる価値のあるものを能率的に発見することができた。分権的決定モデルとしての解釈において，企業が管理部と事業部との間のごく少数の情報の交換によってシステムとしての統一性を保つことを可能ならしめているものは，この点にほかならない。

さて情報の集約化というときいつでも価格が問題となるが，分解原理において価格解釈を与えるものが集中的に現われるのも，まさしくこの箇所である。ここでの双対価格の意味と機能を確認しておくことにしよう。

双対価格ベクトル $\boldsymbol{\Pi}_B$ は2つの部分 $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}$ と $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}}$ とに分れて機能する。m_0 個

---

14) 現実への応用としては，サイクルをくりかえさず一段階改善された状態でとどめ，その段階で得られる公定価格体系と若干の物量目標とを併用することが考えられる。その方がはるかに実際的ではあろう。Dantzig,〔3〕, pp. 464-65.

の成分からなる Π_{I} は，あきらかに，m_0 種の共通資源各1単位に対し，マスター・プログラムの当面の解から帰属される価格の意味をうけとる。 $C_j-\Pi_{\mathrm{I}}A_j$ は，第 j 事業部の各製品1単位当りの直接利益から，各製品1単位の生産に共通資源を投入したことによる帰属費用を差引く操作にほかならない。

Π_{II}の r 個の成分 $\pi_{\mathrm{II}j}$ $(j=1, \cdots, r)$ は，マスター・プログラムのウエイト制約 $\sum_k \lambda_j{}^k=1$ $(j=1, \cdots, r)$ に帰属される「価格」である。これは，第 j 事業部がこれまでに提出した諸計画の現在における最適結合パターン1単位——それは（I・1）のある可能解 X_j を1単位操業することに相当する——を削減するとき， 企業利潤がこうむる減少量を表わしている。 事業部の新しい提案 $X_j{}^k$ 1単位の実施により期待される利潤量 $Z_j=(C_j-\Pi_{\mathrm{I}}A_j)X_j{}^k$ がこの量を上まわるとき，$X_j{}^k$ で採用され，従来の結合パターンは変更される。これが最適性テストの経済学的意味である[15]。

〔4〕 最小化問題の場合

われわれは第I節で最大化問題の形の LP について分解原理を定式化し，したがって第II節での意味づけにおいても，利潤最大化モデルを考えてきた。しかし Dantzig などは最小化問題を標準形式として定式化している[16] から， その場合の経済学的解釈について若干の付言が必要であろう。

いま，「$AX=b$, $X\geq 0$, $\min z=CX$」の形の LP に資源配分問題を担わせるとき，Aをアクティビティ1単位当りの産出量ベクトルからなる行列，bを最終需要ベクトル，Cを単位費用ベクトル，と意味づけるのが標準的である[17]。したがって，（I・1）の目的函数のみを「$\min z=\sum C_jX_j$」にとりかえ，最小化問題を構成するとき，分権的決定モデルとしては次のように解釈することができよう。

15) Baumol and Fabian, 〔1〕, pp. 12–14 における説明と対比せよ。

16) そのため Dantzig は分解原理におけるシンプレックス乗数(=双対価格)を普通の場合とは逆の符号のものとして定義しなおさねばならなかった。最大化問題によって定式化する場合にはその必要はない。半面 Dantzig 流のやり方では目的函数を制約式のうちに含めて機械的に処理できる。

17) 最小化問題の経済学的解釈については， たとえば Simonnard, 〔9〕, pp. 25–27, 111-12 を見よ。

「事業部ごとのローカルな最終需要をみたし，かつ企業全体にとっての最終需要をみたしながら，企業にとっての総費用を最小化するような生産計画を決定せよ。」

数値計算においては，最適性テストにおける符号判定を第I節の記述と逆にしなければならない。(I・8) が与える $z_j^k - f_j^k$ の値が正なら X_j^k をとり入れることで改善がもたらされ，非正なら，改善の余地がない。したがってわれわれは $\max_{j,k}(z_j^k - f_j^k)$ をさがす要があり，そのためサブプログラムに与える目的函数は，「$\min(C_j - \Pi_{\mathrm{I}} A_j) X_j$」でなければならない。

さて費用最小化モデルにおいても双対変数 Π_B は価格の意味を担うが，いまや Π_{I} は，共通需要の現在の充足状態から帰属計算された，アウトプットの評価である。「$\min(C_j - \Pi_{\mathrm{I}} A_j) X_j$」を事業部に課することは，各工程の単位費用から共通需要に対する貢献分を差引いた上で，費用を最小化せよと命じることになる。

いまの操作を，Dantzig and Wolfe は，各工程に対し，補助金ないしボーナスが提示されることだと意味づける[18]。これと対応的に，最大化問題の場合の $\Pi_{\mathrm{I}} A_j$ を，罰金と意味づけることができよう[19]。外部不経済をもたらす活動を罰金によって抑制し，外部経済をもたらす活動を補助金によって助長するというアイデアが，分権的決定の枠組で全体的最適をもたらすための一方策として従来から提唱されているが，これに準じる解釈である。

だが，じつは，われわれのモデルにとって根本的な問題は，補助金であれ罰金であれ，金銭的な誘導だけでは，事業部に，企業にとって最適の生産計画をとらせることができない，という点にある。この問題に立ち入る前に，かんたんな例題を設けて，ここまでにのべたことを例解しておくのが適当であろう。

B．例　解

18) Dantzig and Wolfe, 〔2〕, pp. 101–02.

19) Baumol and Fabian, 〔1〕, p. 12. かれらは同じ最大化問題の枠内で，iteration の段階によっては負の価格が現われ，したがってその資源の使用に対するボーナス支払が生じることがあるように書いている。まちがいではないだろうか。

ある企業の当面する問題を次のようなLPとして定式化できるとしよう。

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \text{(i)} \\
\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \end{array}\right\} & \text{(ii)} \\
\left.\begin{array}{rr} x_1 + x_2 & \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 6 \end{array}\right\} & \text{(iii)} \\
\qquad 2x_3 + x_4 \leq 4 & \text{(iv)} \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
\right. \qquad (\text{II} \cdot 1)
$$

この企業は4個の工程をもち，はじめ2個を第1〔事業〕部，あとの2個を第2〔事業〕部にゆだねている。(i)は企業の目的函数，(ii)は共通資源にかんする制約式，(iii)，(iv)はそれぞれ第1部と第2部固有の制約式である。本社（=管理部）は(iii)，(iv)について全く知ることなく，(i)を達成することを任務とする。第1部は(iii)，第2部は(iv)を知るだけであって，本社の，主として価格にかんする，指示を手引に活動をいとなむ。

〔1〕　計画の開始

本社は，各事業部から1個づつ，可能な生産計画〔基本可能解〕の通報を求め，これにもとづいて(I・4)のSとfを計算する。いま，第1部から$X_1{}^0=[0, 0]$，第2部から$X_2{}^0=[0, 0]$が通報されたとすれば，

$$
S_1{}^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad S_2{}^0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
f_1{}^0 = [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad f_2{}^0 = [5 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,
$$

である。さらに，本社制約式にスラック変数W_1，W_2を導入し，本社プログラム〔限定マスター・プログラム〕の出発点を，次のように構成する。

$$
\begin{array}{l}
\max z = 0\lambda_1{}^0 + 0\lambda_2{}^0 \\
\qquad 0\lambda_1{}^0 + 0\lambda_2{}^0 + W_1 \qquad = 12 \\
\qquad 0\lambda_1{}^0 + 0\lambda_2{}^0 \qquad + W_2 = 10
\end{array}
$$

$$\lambda_1^0 \qquad\qquad = 1$$

$$\lambda_2^0 \qquad\qquad = 1 \qquad\qquad (\text{II}\cdot 2)$$

タブロー形で書けば，タブロー1のようになり，本社プログラムの最初の基底の逆行列と，基本解とがただちに与えられる。

z	0	0	0	0	0
W_1	12	1	0	0	0
W_2	10	0	1	0	0
λ_1^0	1	0	0	1	0
λ_2^0	1	0	0	0	1

(タブロー　1)

z 行の読みとりから，$\Pi_{\text{I}}=[0\quad 0]$，$\Pi_{\text{II}}=[0\quad 0]$ である。これを使って本社は，事業部の暫定的な利潤係数 $C_j-\Pi_{\text{I}}A_j$ を計算し，通告する。

$$\text{第1部へ：}[2\quad 3]-[0\quad 0]\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}=[2\quad 3],$$

$$\text{第2部へ：}[5\quad 3]-[0\quad 0]\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}=[5\quad 3]。$$

〔2〕 第1次生産計画

各事業部は，通告された利潤係数をサブプログラム (I・10) の目的函数に入れてサブプログラムを解き，最適基本解を，生産計画として本社に提案する。

第1部から：$X_1^1=[2,\ 2]$，$Z_1^1=10$，

第2部から：$X_2^1=[0,\ 4]$，$Z_2^1=12$

〔3〕 審　査

本社は，Π_{II} を用いて各案の全社にとっての収益性を審査する。

X_1^1 につき：$\pi_{\text{II}1}-Z_1^1=0\quad 10<0$，

X_2^1 につき：$\pi_{\text{II}2}-Z_2^1=0-12<0$，

であるから，どちらも，採用すると全社の利潤を増す力をもっているが，$12>10$ にしたがい，X_2^1 を採用することに決める。

〔4〕 本社プログラム

本社は，X_2^1 に対応する新しい列をプログラムに付加する。

$$S_2^1=\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix},\qquad f_2^1=[5\quad 3]\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=12$$

であるから，新しい列は〔−12, 8, 4, 0, 1〕。これをタブロー1に付加して，ピボット操作1回で次の結果（タブロー2）を得る。z 行から $\Pi_{\mathrm{I}}=[0\quad 0]$, $\Pi_{\mathrm{II}}=[0\quad 12]$ を得る。この新しい Π にもとづき，本社は，事業部の利潤係数を修正・通告するが，いまの場合 $\Pi_{\mathrm{I}}=[0\quad 0]$ であるから，先と同じ数値が行く。

z	12	0	0	0	12
W_1	4	1	0	0	−8
W_2	6	0	1	0	−4
λ_1^0	1	0	0	1	0
λ_2^1	1	0	0	0	1

（タブロー 2）

〔5〕 第2次提案と審査

各事業部は目的函数を修正してサブプログラムを解き，最適基本解を本社へ提出するが，いまの場合，先と同じ数値が送られる。

本社はこれを審査するが，

X_1^2 につき：$\pi_{\mathrm{II1}}-Z_1^2=0-10<0$,

X_2^2 につき：$\pi_{\mathrm{II2}}-Z_2^2=12-12=0$,

であるから，X_2^2 を採用しても全社の利潤は増大しない。X_1^2 の採用を決定する。

〔6〕 本社プログラム

X_1^2 に対応する新しい列を作る。

$$S_1^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix},\qquad f_1^2=[2\quad 3]\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=10$$

であるから，新しい列は，〔−10, 6, 8, 1, 0〕。これをタブロー2の逆行列で変換した上でタブロー2に付加し，ピボット操作2回で次の結果（タブロー3）を得る。

$\Pi_{\mathrm{I}}=\left[\dfrac{7}{5}\quad \dfrac{1}{5}\right]$, $\Pi_{\mathrm{II}}=[0\quad 0]$ であり，これにもとづいて修正・通告される事業部の利潤係数は，

z	$\frac{94}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0
λ_1^2	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	0	0
λ_2^0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	0	1
λ_1^0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	1	0
λ_2^1	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{20}$	0	0

（タブロー 3）

第1部に対し：

$$[2\quad 3]-\left[\frac{7}{5}\quad \frac{1}{5}\right]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=[-1\quad 1],$$

第２部に対し：$[5\quad 3]-\begin{bmatrix}\frac{7}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & 0\end{bmatrix}$.

〔７〕 第３次提案と審査

今度は，第１部から，$X_1^3=[0,\ 3]$，$Z_1^3=3$；第２部から，$X_2^3=[2,\ 0]$，$Z_2^3=\frac{4}{5}$ が本社へ提案される。$\pi_{\mathrm{II}1}-Z_1^3=-3$，$\pi_{\mathrm{II}2}-Z_2^3=-\frac{4}{5}$ であるから，本社は X_1^3 を採用する。

〔８〕 本社プログラム

前と同様にして，$S_1^3=[3,\ 9]$，$f_1^3=9$，であるから，新しい列は〔-9，3，9，1，0〕。これをタブロー３の逆行列で変換した上でタブロー３に付加し，ピボット操作１回で次の結果（タブロー４）を得る。

z	$\frac{96}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	4
λ_1^2	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	-2
λ_1^3	$\frac{2}{15}$	$\frac{-4}{15}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{3}$
λ_1^0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{2}{3}$
λ_2^1	1	0	0	0	1

（タブロー　４）

$\Pi_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ にもとづいて，新たに事業部に通告される利潤係数は，第１部に対し〔0　0〕，第２部に対し $\begin{bmatrix}\frac{8}{5} & 1\end{bmatrix}$ である。

〔９〕 第４次提案と審査

第１部は，X_1^4 として任意の基本可能解をとりうるが，どれに対しても，$Z_1^4=0$；第２部は，$X_2^4=X_2^1=[0,\ 4]$，$Z_1^4=4$，を算出し，提案する。本社の審査は，前者につき，$\pi_{\mathrm{II}1}-Z_1^4=0-0=0$；後者につき，$\pi_{\mathrm{II}2}-Z_2^4=4-4=0$ であるから，いまや，どの案も全社の利潤を改善する力をもたず，タブロー４で，全社にとって最適の生産計画が得られていたことがわかった。

〔10〕 生産指令

いまや本社は，タブロー４で得られている λ_j^k の最適値を，これまで何次にもわたって提出された諸計画を結合すべきウエイトとして，各事業部に通告する。この段階ではじめて本社プログラムのオモテの解 (primal solution) が使われることに注意されたい。さて各事業部の実施すべき生産計画は次のようになる。

第１部：$\mathring{X}_1=\dfrac{4}{15}X_1{}^0+\dfrac{9}{15}X_1{}^2+\dfrac{2}{15}X_1{}^3$

$$=\frac{4}{15}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\frac{9}{15}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\frac{2}{15}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

第２部：$\mathring{X}_2=1X_2{}^1=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$

また，これが実施された場合にこの企業が全体として期待しうる利潤は，両事業部に期待される利潤の和：

$$z=C_1\mathring{X}_1+C_2\mathring{X}_2=\frac{36}{5}+21=\frac{96}{5}$$

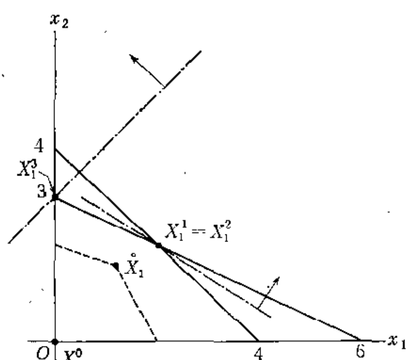
である。

C．分権化の不徹底

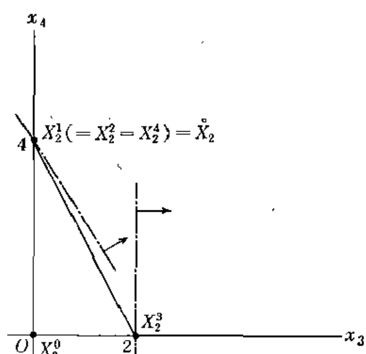
〔１〕　問題の所在

ここで，Ａの終りに予告しておいた問題にもどる。われわれのモデルは，試行錯誤的な計算価格を主たる手引とする分権的決定過程を表わすものであったが，過程の最終段階で，もはや価格でなく，諸計画の結合比率が直接指示されなければならなかったということは，なにを意味するのか。

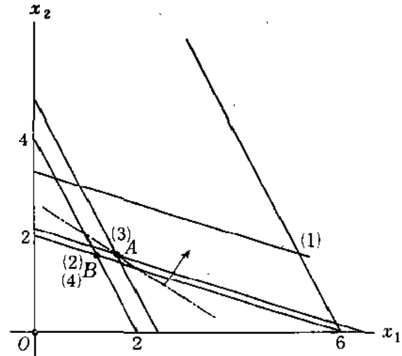
Ｂであつかった例題を幾何的に示すことによって，事態を視覚的に観察することができるであろう。



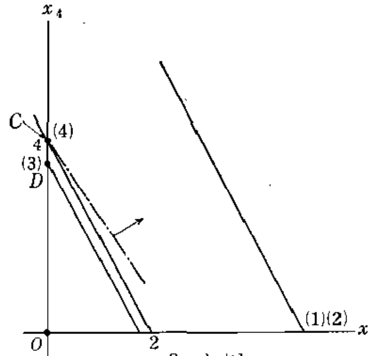
１－a 図
サブプログラム(第１事業部)



１－b 図
サブプログラム(第２事業部)



2 —a 図
マスター・プログラム(第１事業部)



2 —b 図
マスター・プログラム(第２事業部)

1－a図と1－b図は，それぞれ第１〔事業〕部と第２〔事業〕部のサブプログラム上に生じる事態を示している。実線は事業部制約式，鎖線は本社から受けとる目的函数を示している。本社が共通資源の価格を改訂するたびに目的函数の勾配が変化し，事業部はその可能域の，異った端点へ誘導される。

2－a図と2－b図は，マスター・プログラムの上に生じる事態を，両事業部につき別々に示している。マスター・プログラム上では目的函数はつねに不変である。だが，本社が新たな最適加重平均生産計画を算出するごとに，共通資源の，一方の事業部に対する利用可能量は，他方の事業部における消費を考慮すれば，潜在的にシフトする。この事情を実線が表わしている。（　）内の数字はタブローの番号に照応している。本社が算出する λ_B ベクトルは，図の上の点に対応するが，タブローの進行とともに，2－a図では $O \to O \to A \to B$, 2－b図では $O \to C \to D \to C$ と進む。しかし最終段階に至るまでは，本社はこれらの点を直接指示することなく，目的函数の勾配を対応的に変えることで，事業部に次の可能性を探させる。最後に至って本社は最適点を直接指示するが，それは1－a図では $\mathring{X}_1$ 点，1－b図では $\mathring{X}_2$ 点である。

さて，本社は事業部の制約式を知ることなく，事業部は本社制約式を知ることなしに，解に近づこうとしている。お互いに相手の図を知らないわけである。

だがわれわれは，1－a図と1－b図，2－a図と2－b図を重ね合せて見ることによって，真実の可能領域を知ることができる。第2部が $\mathring{X}_2$ 点をとることを前提するとき，第1部に対する共通資源の利用可能量は1－a図の点線の如くなるはずであり，$\mathring{X}_1$ 点はこの点線と座標軸がつくる可能領域の端点である。そして $\mathring{X}_1$ 点と $\mathring{X}_2$ 点との組合せが企業にとって最適なのであるが，第1部の立場からすれば，$\mathring{X}_1$ のような点を選ぶ動機はないであろう。第Ⅱ節Aで見たような意味におけるいかなる罰金も，目的函数の勾配を変えるにすぎず，1－a図および1－b図の実線上の点を選ばせることしかできない。第2部については，$\mathring{X}_2$ 点が事業部自身の選ぶ端点と一致したが，これは幸福な偶然にすぎないであろう。

以上によって，問題点の正確なすがたがわかった。企業にとっての最適点が事業部固有の制約式の作る可能領域においては，内点[20]にならないという保証はなく，そして内点になった場合，この点を金銭的刺戟のみで実現することは不可能である[21]。

したがって，われわれのモデルは，正確な意味で分権的決定機構であるとはいえず，むしろ「情報の完全集中なき中央計画」[22]機構とよぶ方が，ヨリ適切であろう。

〔2〕　外部効果の問題

いま見たような現象のおこる根拠を，Baumol and Fabian は，「外部効果」(externality) の存在に求めている[23]。次のような理由から，これは一見もっともに思われる。

① 外部効果は，競争市場機構による資源の最適配分を妨げる一要因である。

② 外部効果の概念に属するもののうち，競争価格機構の有効性を妨げる真の

20)　厳密にいえば「端点以外の非有効点」と書くべきであろう。

21)　もちろん目的函数と勾配のひとしい有効フロンティア上で端点以外の点に来た場合も，事業部がその点だけをとる必然性はないであろうが，事業部にとり等価な案のうち1つなのだからこの問題は2次的である。Baumol and Fabian はこのような場合にかなりこだわっている。〔1〕, pp. 15–17.

22)　Dantzig, の特徴づけである。〔3〕, § 23–2 および § 23–3.

要因として金銭的 (pecuniary) 外部効果と区別される技術的 (technological) 外部効果の定義は，「ある企業の生産関数に他の企業の財の投入産出の量を示す変数がはいりこむ」場合[24]とされているが，これだけの限定からすれば，われわれのモデルの場合，共通資源制約 $\sum_{j=1}^{r}A_jX_j=b_0$ の存在によって，事業部間にある種の技術的外部効果が存在していると考えることも可能になる。

③ Dantzig and Wolfe は，モデルの解釈に当り「補助金」概念を登場させているが，これは普通，外部効果に対処するための用具である。

だが，$\sum_{j=1}^{r}A_jX_j=b_0$ のような加法的な関係の存在を，技術的外部効果の存在と見ることには問題があろう。

Baumol and Fabian 自身みとめているように，本来の意味での技術的外部効果を処理するためには，非線型の場合に進まねばならない[25]。機会をあらためて，外部効果の存在の下での最適化の問題を論じることにしよう。

参 考 文 献

〔1〕 Baumol, William J. and Tibor Fabian, "Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economies", *Management Science*, Vol. 11, No. 1, Sept. 1964, pp. 1–32.

〔2〕 Dantzig, George B. and Philip Wolfe, "Decomposition Principle for Linear Program", *Operations Research*, Vol. 8, Feb. 1960, pp. 101–11.

〔3〕 Dantzig, George B., *Linear Programming and Extensions*, 1963.

〔4〕 Hadley, G., *Linear Programming*, 1962.

〔5〕 Hirshleifer, Jack, "Internal Pricing and Decentralized Decisions," in C. Bonini et al., *Management Controls*, 1964.

〔6〕 Koopmans, Tjalling C., "Allocation of Resources and the Price System", in *Three Essays on the State of Economic Science*, 1957.

〔7〕 古瀬大六「生産の経済学」第4章，昭和39年。

〔8〕 根岸隆「価格と配分の理論」第4章，昭和40年。

〔9〕 Simonnard, Michel, *Linear Programming*, (English edition), 1966.

23) Baumol and Fabian, 〔1〕, pp. 1–2, 4–5, 18–20.
24) 根岸, 〔8〕, p. 107.
25) さしあたり Baumol and Fabian, 〔1〕, pp. 18–20 参照。